1. Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. В начале игры фишка находится в точке с координатами (3, 2). Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами (x, y) в одну из трёх точек: или в точку с координатами ($x + 3$, y), или в точку с координатами (x, $y + 2$), или в точку с координатами (x, $y + 4$). Выигрывает игрок, после хода которого расстояние по прямой от фишки до точки с координатами (0, 0) больше 12 единиц. Кто выиграет при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок?
Постройте дерево партии для выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы).

2. Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. В начале игры фишка находится в точке с координатами (3, −5). Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами (x, y) в одну из трёх точек: или в точку с координатами ($x + 3$, y), или в точку с координатами (x, $y + 4$), или в точку с координатами (x, $y + 5$). Выигрывает игрок, после хода которого расстояние по прямой от фишки до точки с координатами (0, 0) больше 9 единиц. Кто выиграет при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.
Постройте дерево партии для выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы).

3. Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. На столе в кучке лежат фишки. На лицевой стороне каждой фишки написано двузначное натуральное число, обе цифры которого находятся в диапазоне от 1 до 4. Никакие две фишки не повторяются. Игра состоит в том, что игроки поочередно берут из кучки по одной фишке и выкладывают в цепочку на стол лицевой стороной вверх таким образом, что каждая новая фишка ставится правее предыдущей и ближайшие цифры соседних фишек совпадают. Верхняя часть всех выложенных фишек направлена в одну сторону, то есть переворачивать фишки нельзя. Например, из фишки, на которой написано 23, нельзя сделать фишку, на которой написано 32. Первый ход делает Петя, выкладывая на стол любую фишку из кучки. Игра заканчивается, когда в кучке нет ни одной фишки, которую можно добавить в цепочку. Тот, кто добавил в цепочку последнюю фишку, выигрывает, а его противник проигрывает.

Будем называть партией любую допустимую правилами последовательность ходов игроков, приводящую к завершению игры. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, указать, какую фишку он должен выставить в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Пример партии.

Пусть на столе в кучке лежат фишки: 11, 12, 13, 21, 22, 23.

Пусть первый ход Пети 12.

Ваня может поставить 21, 22 или 23. Предположим, он ставит 21. Получим цепочку 12-21.

Петя может поставить 11 или 13. Предположим, он ставит 11. Получим цепочку 12-21-11.

Ваня может поставить только фишку со значением 13. Получим цепочку 12-21-11-13.

Перед Петей в кучке остались только фишки 22 и 23, то есть нет фишек, которые он мог бы добавить в цепочку. Таким образом, партия закончена, Ваня выиграл.

Выполните следующие три задания при исходном наборе фишек в кучке {12, 14, 21, 22, 24, 41, 42, 44}.

Задание 1.

а) Приведите пример самой короткой партии, возможной при данном наборе фишек. Если таких партий несколько, достаточно привести одну.

б) Пусть Петя первым ходом пошел 42. У кого из игроков есть выигрышная стратегия в этой ситуации? Укажите первый ход, который должен сделать выигрывающий игрок, играющий по этой стратегии. Приведите пример одной из партий, возможных при реализации выигрывающим игроком этой стратегии.

Задание 2. Пусть Петя первым ходом пошел 44. У кого из игроков есть выигрышная стратегия, позволяющая в этой ситуации выиграть своим четвертым ходом? Постройте в виде рисунка или таблицы дерево всех партий, возможных при реализации выигрывающим игроком этой стратегии. На рёбрах дерева указывайте ход, в узлах — цепочку фишек, получившуюся после этого хода.

Задание 3. Укажите хотя бы один способ убрать 2 фишки из исходного набора так, чтобы всегда выигрывал не тот игрок, который имеет выигрышную стратегию в задании 2. Приведите пример партии для набора из 6 оставшихся фишек.

4. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит табличка, на которой написано два числа. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок заменить любое из этих чисел на их
сумму. Игра завершается в тот момент, когда сумма двух чисел становится не менее 28. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что сумма чисел будет 28 или больше.

1. Назовите максимальное значение S, при котором Петя не может выиграть первым ходом из позиции (7, S)
2. Кто имеет выигрышную стратегию из позиции (6,7)? Опишите эту стратегию.
3. Кто имеет выигрышную стратегию из позиции (2,3)? Опишите эту стратегию.

5. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, на которой записана пара неотрицательных чисел. Будем называть эту пару чисел позицией. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может заменить одно из чисел пары по своему выбору на сумму обоих чисел. Так, например, если перед ходом игрока была позиция (2, 4), то после его хода будет позиция (6, 4) или (2, 6). Игра завершается в тот момент, когда сумма чисел пары становится не менее 67. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую пару, что сумма ее чисел стало не менее 67.

1. Перед ходом Пети на табличке записана пара чисел (12, *S*). Укажите минимальное значение *S* — такое, что Петя может выиграть одним своим первым ходом.
2. Для начальной позиции (15, 14) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию.
3. Для начальной позиции (2, 4) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). В узлах дерева указывайте позиции, на рёбрах рекомендуется указывать ходы. Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не является верным ответом на это задание.