

Два игрока, Паша и Вася, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 56. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 56 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 55$ .

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

#### Задание 1

а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения  $S$ , и укажите выигрышающий ход для каждого указанного значения  $S$ .

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Паша не может выиграть за один ход, но при любом ходе Паши Вася может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Васи.

#### Задание 2

Укажите два таких значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём (а) Паша не может выиграть за один ход и (б) Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вася. Для каждого указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Паши.

#### Задание 3

Укажите значение  $S$ , при котором:

– у Васи есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши, и

– у Васи нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Васи.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Васи (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в куче.