

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может: добавить в кучу один камень (действие А) или утроить количество камней в куче, а затем добавить ещё один камень (действие Б). Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 31 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 32 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 31$.

Говорят, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение S , при котором

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах — количество камней в позиции.