

Две подруги, Катя и Ира, играют в следующую игру. Перед подругами лежит куча камней. Девушки ходят по очереди, первый ход делает Катя. За один ход девушка может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 12 или 20 камней. У каждой девушки, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается девушка, сделавшая последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 34$.

Будем говорить, что девушка имеет выигрышную стратегию, если она может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию подруги — значит, описать, какой ход она должна сделать в любой ситуации, которая ей может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Катя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрышающий ход для каждого указанного значения S .

б) Укажите такое значение S , при котором Катя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Кати Ира может выиграть своим первым ходом.

Опишите выигрышную стратегию Иры.

2. Укажите два таких значения S , при которых у Кати есть выигрышная стратегия, причём (а) Катя не может выиграть за один ход и (б) Катя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ира.

Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Кати.

3. Укажите значение S , при котором:

– у Иры есть выигрышная стратегия, позволяющая ей выиграть первым или вторым ходом при любой игре Кати, и

– у Иры нет стратегии, которая позволит ей гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Иры. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Иры (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах — количество камней в куче.