

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится более 100. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 101 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 100$ .

Говорят, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа  $S$  Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани. Представьте его в виде рисунка или таблицы. Для каждого ребра дерева укажите, кто делает ход, для каждого узла — количество камней в позиции.