

Два игрока, Паша и Валя, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или увеличить число камней в 2 раза. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 или 14 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 24. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 24 или больше камней. Но, если камней в куче становится больше 38, то проигрывает тот, кто сделал последний ход. Например, в куче было 20 камней. Паша, удвоив количество камней, получил 40. В таком случае выигрывает не Паша, а Валя.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 23$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Паша может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрывающие ходы.

б) Кто имеет выигрышную стратегию при $S = 22, 21, 20$?

2. Кто имеет выигрышную стратегию при $S = 10, 11$?

3. Кто имеет выигрышную стратегию при $S = 9$? Опишите эту стратегию, постройте дерево ходов.