

Задания

Задание 18 № 13727

Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n .

Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x \& 51 = 0 \vee (x \& 41 = 0 \rightarrow x \& A = 0)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение.

Преобразуем выражение по законам алгебры логики:

$$X + (Y \rightarrow Z) = X + (\neg Y + Z) = X + Z + \neg Y = Y \rightarrow (X + Z) = (Y \rightarrow X) + (Y \rightarrow Z).$$

Далее применяем обозначения и реализуем способ решения, изложенный К. Ю. Поляковым в теоретических материалах (см., например, раздел «Теория» на нашем сайте), без дополнительных пояснений.

Заметим, что первое слагаемое логической суммы является импликацией $Z_{41} \rightarrow Z_{51}$, которая не является истинной для всех x (см. ниже). Тогда необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое логической суммы было тождественно истинным.

Действительно, например, для $x = 2$ поразрядная конъюнкция с числом 41 дает 0, а с числом 51 дает 2. Поэтому импликация $(2 \& 41) \rightarrow (2 \& 51)$ принимает вид $1 \rightarrow 0$ — ложь.

2: 000010

41: 101001

$2 \& 41$: 000000, то есть $2 \& 41 = 0$. Высказывание $2 \& 41 = 0$ истинно.

2: 000010

51: 110011

$2 \& 51$: 000010 = 2, то есть $2 \& 51 = 2$. Высказывание $2 \& 51 = 0$ ложно.

Итак, импликация $Z_{41} \rightarrow Z_A$ должна быть тождественно истинной. Запишем число 41 в двоичной системе счисления: $41_{10} = 101001_2$. Единичные биты, стоящие в правой части, должны являться единичными битами левой. Поэтому в правой части единичными битами независимо друг от друга могут быть (а могут не быть) только нулевой, второй и четвертый биты (как обычно, считая справа налево, начиная с нуля). Поскольку искомое A — наименьшее неотрицательное целое число, в его записи нет единичных битов.

Тем самым, наименьшее $A = 000000_2 = 0_{10}$.