

Задания

Задания Д26 С3 № 11362

Два игрока, Паша и Валя, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 17 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Валя. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 19$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания.

1. а) При каких значениях числа S Паша может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Паши.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 18, 17, 16$? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 9, 8$? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 7$? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах — количество камней в позиции.

[Спрятать решение](#)

Решение.

1. а) Паша может выиграть, если $S=19$ или $S=10, 11, 12, 13, 14, 15$. При $S=19$ первым ходом нужно добавить в кучу один камень, при остальных указанных значениях S нужно удвоить количество камней.

б) При $S=16, 17$ или 18 удваивать количество камней не имеет смысла, так как после такого хода выигрывает противник. Поэтому можно считать, что единственный возможный ход – это добавление в кучу одного камня.

При $S=18$ после такого хода Паши в куче станет 19 камней. В этой позиции ходящий (т. е. Валя) выигрывает (см. п. 1а): при $S=18$ Паша (игрок, который должен ходить первым) проигрывает.

Выигрышная стратегия есть у Вали.

При $S=17$, после того как Паша своим первым ходом добавит один камень, в куче станет 18 камней. В этой позиции ходящий (т. е. Валя) проигрывает (см. выше): при $S=17$ Паша (игрок, который должен ходить первым) выигрывает. Выигрышная стратегия есть у Паши.

При $S=16$ выигрышная стратегия есть у Вали. Действительно, если Паша первым ходом удваивает количество камней, то в куче становится 32 камня, и игра сразу заканчивается выигрышем Вали. Если Паша добавляет один камень, то в куче становится 17 камней. Как мы уже знаем, в этой позиции игрок, который должен ходить (т. е. Валя), выигрывает.

Во всех случаях выигрыш достигается тем, что при своём ходе игрок, имеющий выигрышную стратегию, должен добавить в кучу один камень. Замечание для проверяющего. Скорее всего, решение экзаменуемого будет не столь подробным. Это не является ошибкой. Ученик может, например, нарисовать деревья всех возможных партий для указанных значений S .

Другая возможность — (1) указать на то, что удваивать кучу не имеет смысла, и (2) последовательно сводить случай $S=18$ к случаю $S=19$, случай $S=17$ — к случаю $S=18$ и т. д.

2. При $S=9$ или 8 выигрышная стратегия есть у Паши. Она состоит в том, чтобы удвоить количество камней в куче и получить кучу, в которой будет соответственно 18 или 16 камней. В обоих случаях игрок, который будет делать ход (теперь это Валя), проигрывает (п. 1б).

3. При $S=7$ выигрышная стратегия есть у Вали. После первого хода Паши в куче может стать либо 8, либо 14 камней. В обеих этих позициях выигрывает игрок, который будет делать ход (теперь это Валя). Случай $S=8$ рассмотрен в п. 2, случай $S=14$ рассмотрен в п. 1а.

В таблице изображено дерево возможных партий при описанной стратегии Вали. Заключительные позиции (в них выигрывает Валя) подчёркнуты. На рисунке это же дерево изображено в графическом виде (оба способа изображения дерева допустимы).

Положения после очередных ходов						
И.п.	1-й ход Паши (все ходы)	1-й ход Вали (только ход по стратегии)	2-й ход Паши (все ходы)	2-й ход Вали (только ход по стратегии)	3-й ход Паши (все ходы)	3-й ход Вали (только ход по стратегии)
7	$7+1=8$	$8*2=16$	$16+1=17$	$17+1=18$	$18+1=19$	$19+1=20$
			$16*2=32$		$18*2=36$	
	$7*2=14$	$14*2=28$				

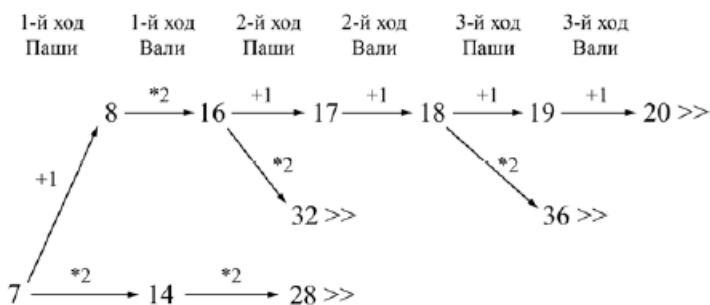


Рис. 1. Дерево всех партий, возможных при Валиной стратегии. Знаком «>>» обозначены позиции, в которых партия заканчивается

Критерии проверки: [Спрятать критерии](#)

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
<p>Выполнены второе и третье задания.</p> <p>Для первого задания правильно перечислены позиции, в которых Паша выигрывает первым ходом (п. 1а), и правильно указано, кто из игроков имеет выигрышную стратегию при указанных значениях S (п. 1б). При этом допускаются недочёты следующих типов:</p> <ul style="list-style-type: none"> – в п. 1а не указано, каким ходом выигрывает Паша; – в п. 1б не указано, что игрокам нет смысла удваивать количество камней в куче. <p>Здесь и далее в решениях допускаются арифметические ошибки, которые не искажают сути решения и не приводят к неправильному ответу</p>	3
<p>Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 балла, и выполнено одно из следующих условий.</p> <ul style="list-style-type: none"> · Выполнено третье задание. · Выполнены первое и второе задания. · Первое задание выполнено, возможно, при наличии недочётов, указанных в критериях на 3 балла; для второго задания (i) правильно указано, кто из игроков имеет выигрышную стратегию в каждой из указанных позиций, и (ii) правильно указан первый ход Паши при выигрышной стратегии, однако не указано, что после выбранного хода Паши получается позиция, выигрышная для Вали; для третьего задания правильно указан игрок, имеющий выигрышную стратегию 	2
<p>Не выполнены условия, позволяющие поставить 3 или 2 балла, и выполнено одно из следующих условий.</p> <ul style="list-style-type: none"> · Первое задание выполнено, возможно, с недочётами, указанными в критериях на 3 балла. · Второе задание выполнено, возможно, с недочётами, указанными в критериях на 2 балла. · Для второго и третьего заданий во всех случаях правильно указан игрок, имеющий выигрышную стратегию 	1
<p>Не выполнено ни одно из условий, позволяющих поставить 1, 2 или 3 балла</p>	0
<i>Максимальный балл</i>	3