Задания

Задание 18 № 13727

Обозначим через m&n поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n.
Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.
Для какого наименьшего неотрицательного целого числа А формула

$$x\&51 = 0 \lor (x\&41 = 0 \to x\&A = 0)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?
Решение.
Преобразуем выражение по законам алгебры логики:

$$X + (Y \to Z) = X + (\neg Y + Z) = X + Z + \neg Y = Y \to (X + Z) = (Y \to X) + (Y \to Z).$$

Далее применяем обозначения и реализуем способ решения, изложенный К. Ю. Поляковым в теоретических материалах (см., например, раздел «Теория» на нашем сайте), без дополнительных пояснений.

Заметим, что первое слагаемое логической суммы является импликацией $Z_{41} \to Z_{51}$, которая не является истинной для всех x (см. ниже). Тогда необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое логической суммы было тождественно истинным.

Действительно, например, для x = 2 поразрядная конъюнкция с числом 41 дает 0, а с числом 51 дает 2. Поэтому импликация (2&41) → (2&51) принимает вид 1 → 0 — ложь.

2: 000010
41: 101001
2&41: 000000, то есть 2&41 = 0. Высказывание 2&41 = 0 истинно.

2: 000010
51: 110011
2&51: 000010 = 2, то есть 2&51 = 2. Высказывание 2&51 = 0 ложно.

Итак, импликация $Z_{41} \to Z_A$ должна быть тождественно истинной. Запишем число 41 в двоичной системе счисления: $41_{10} = 101001_2$. Единичные биты, стоящие в правой части, должны являться единичными битами левой. Поэтому в правой части единичными битами независимо друг от друга могут быть (а могут не быть) только нулевой, второй и четвертый биты (как обычно, считая справа налево, начиная с нуля). Поскольку искомое А — наименьшее неотрицательное целое число, в его записи нет единичных битов.

Тем самым, наименьшее $A = 000000_2 = 0_{10}$.